冯梅, 安美建. 反演模型分辨率的估算方法[J]. CT 理论与应用研究, 2013, 22(4): 587-604.
Feng M, An MJ. How to determine spatial resolution for an inverse problem[J]. CT Theory and Applications, 2013, 22(4): 587-604.

反演模型分辨率的估算方法

冯梅✉，安美建

（中国地质科学院地质力学研究所，北京 100081）

摘要：反演问题的时空间分辨率或称时空分辨长度是评估模型精细程度的重要参数，决定了该模型应用的范围和价值，但是分辨长度估算却是比反演更复杂和麻烦的数学问题。除了层析成像中广泛利用理论模型恢复试验定性提取空间分辨长度外，通过求解分辨率矩阵可定量获得分辨长度。通过矩阵操作给出的分辨率矩阵包括三类：直接分辨率矩阵、正则化分辨率矩阵和混合分辨率矩阵。这三类矩阵包含了反演本身不同侧面的信息，因此在一个反演应用中，同时提供这三类分辨率矩阵可更全面地评估反演模型分辨率分布。最近 An（2012）提出了从大量随机理论模型及其解中统计出分辨率矩阵的方法。这种分辨率矩阵是从模拟真实反演实验的输入和输出模型中通过反演得到的，因此这种分辨率矩阵更能反映整个反演所涉及到的更多因素和过程；同时由于这种分辨率矩阵计算过程无需进行矩阵操作且不依赖于具体正演和反演方法，因此可以被应用于更普遍的反演问题。实际应用证明统计分辨率分析方法适用于对二维和三维层析成像反演模型进行分辨率分析。

关键词：分辨长度；分辨率矩阵；反演；模型评估

文章编号：1004-4140（2013）04-0587-18　**中图分类号：**P 315　**文献标志码：**A

在实际研究中，我们往往需要通过在物体外部进行观测来了解该物体内部的情况。从数学上来说，外部观测可表示为一个包括 n 个观测的观测矢量 $\boldsymbol{d}$，将希望获得的信息表示为一个由 m 个参数构成的模型矢量 $\boldsymbol{m}$（各参数可表示为：$m_i, i=1,2,\cdots,m$）。基于物理学知识，可以建立从模型到观测量的正演方程 $\boldsymbol{d}=g(\boldsymbol{m})$。从外部观测量 $\boldsymbol{d}$ 来获得内部未知信息 $\boldsymbol{m}$ 的过程是一个典型的求解反演方程 $\underline{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{g}^{-g}(\boldsymbol{d})$ 的过程，即利用观测矢量 $\boldsymbol{d}$ 和观测算子 g 的实际或广义的逆 g^{-g} 来最终获得模型矢量的解，这里表示为 $\underline{\boldsymbol{m}}(\underline{m}_1,\underline{m}_2,\cdots,\underline{m}_m)$。如果观测误差 $\delta\boldsymbol{d}$ 是已知的，那么解的变化范围 $\delta\underline{\boldsymbol{m}}$ 也可以利用反演方程获得。解的变化范围 $\delta\underline{\boldsymbol{m}}$ 表示了测量值与真值的接近程度，即可称为一般意义上的精度。但在地球科学中，图件或模型的精度往往指的是空间精细程度，即是一般意义上的(空间)分辨率。

求解以上反演问题是一个典型的数学问题，很多课本对如何获得各种反演问题的解进行了详细介绍[1-5]。例如，常见的层析成像是观测量和未知量都非常多的稀疏矩阵线性反演问题，最小二乘正交分解（LSQR）[6-7]可以很好地求解这种问题[8]；即使对于复杂的非线性反演问题，人们也可以获得它们的全局解[9-13]。

收稿日期：2013-03-07。
基金资助：中国地质调查项目(12120113101400)；国家自然科学基金(41174039；40874021)。

对于一个纯数学问题，在获得了问题的解 $\underline{\boldsymbol{m}}$ 和解的不确定范围 $\delta\underline{\boldsymbol{m}}$ 之后，这个反演问题的分析基本就结束了；但对于一些实际应用的反演问题来说，对模型精细程度的评估却是反演过程中最关键的一环，虽然这一环节往往被忽视[14−15]。对于一些与时空有关的应用数学问题（比如地球物理学问题），模型 $\boldsymbol{m}$ 的每一个参数 (m_i) 代表了某个时空位置的信息，即这个参数也可以表示为 $m_i(x, y, z, t)$。这时，在某个空间位置 (x, y, z, t) 的解 $\underline{m}_i$ 所代表的时空尺度或者说该解代表了多大时空范围的平均信息是评估该解应用价值的主要指标，这个最小可探测时空尺度被称为时空分辨率（temporal and spatial resolution）。比如，给出地球上某点温度的时候，不但需要给出温度的变化范围，同时更需要给出其时空分辨长度。如果所给温度的时间分辨长度是 1 分钟、空间分辨率是 1 m 的话，这说明了这个温度值只代表了所测时间 1 分钟以内和在 1 m 空间范围内的平均温度。与解 $\underline{\boldsymbol{m}}$ 本身和解的变化范围（或称精度）$\delta\underline{\boldsymbol{m}}$ 一样，解的时空分辨率是一个对与时空相关参数进行反演分析过程中不可缺少的。

一般常见的时空分辨率是最小可探测空间尺度，即被称为空间分辨率（spatial resolution）或分辨长度（resolution length）。在地球科学中，图件或模型的精度往往指的就是其空间分辨率，而不是一般意义上的精度（测量值与真值的接近程度）。通过求解反演方程来获得解 $\underline{\boldsymbol{m}}$ 和解的不确定范围 $\delta\underline{\boldsymbol{m}}$ 已经不再是困难的事，但是估算一个反演问题的时空分辨率却是较复杂和麻烦的事。多数有关反演问题的课本没有对时空分辨率进行详细介绍，甚至除了层析成像之外，多数反演应用基本不提供任何时空分辨率信息。

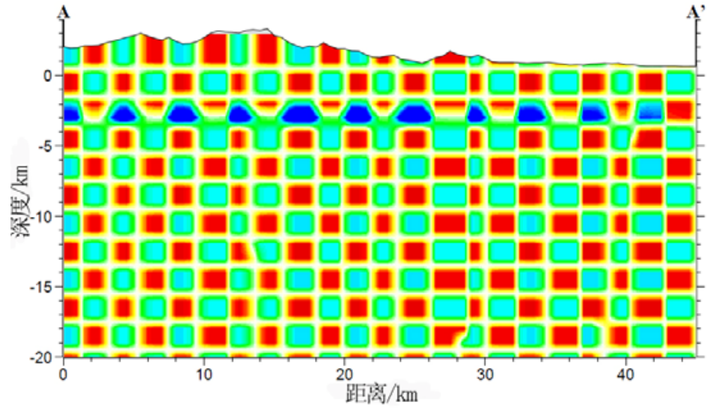
为对时空分辨率分析有个清晰的认识，下面将对时空分辨率估算问题进行综合介绍。

1 理论模型恢复试验

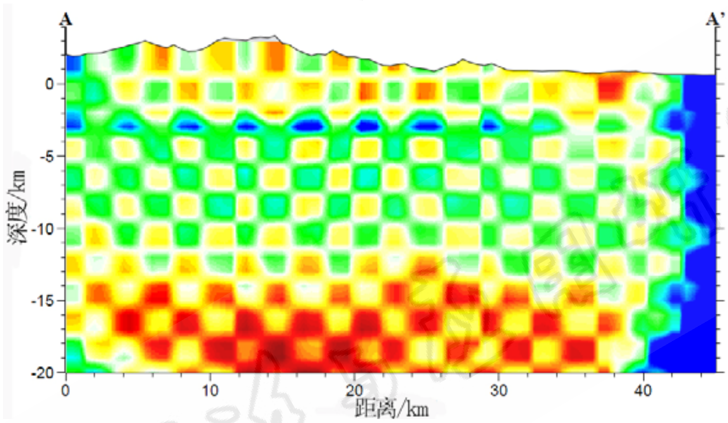
理论模型恢复试验是一种通过对比特定理论模型与其反演解间异同定性获得分辨长度的方法。最常见的是棋盘格测试（checkerboard tests）或其他特定结构理论模型的恢复测试[14，16−19]。图 1 是一个棋盘格测试的实例[20]。在这种方法中，先造一个如棋盘格或其他特定结构的理论模型 $\boldsymbol{m}$，然后通过正演计算获得理论模型的观测 $\boldsymbol{d}$。在通过反演获得解 $\underline{\boldsymbol{m}}$ 后，通过绘图显示理论模型 $\boldsymbol{m}$ 和反演解 $\underline{\boldsymbol{m}}$ 并进行对比，检查给定的结构能否在反演模型中得到体现。如果反演模型中某位置给定的结构得以体现，则说明了实际反演结果在该空间位置具有分辨这种空间尺度结构的空间分辨率。从以上介绍来看，这种方法是通过对比特定理论模型 $\boldsymbol{m}$ 和反演的解 $\underline{\boldsymbol{m}}$，最终给出某个位置的大致分辨率值。

在棋盘格测试中，最小可恢复格子宽度的一半被认为是分辨长度[21]。在图 1 实例中，理论模型 $\boldsymbol{m}$ 中右侧的格子结构没有在 $\underline{\boldsymbol{m}}$ 中体现，因此这些位置的反演结果分辨率低于给定棋盘格结构的尺度；而其他能够被反演出来格子结构的位置的分辨率应至少与给定棋盘格宽度一样，即具有格子大小的异常能够被反演出来。

虽然理论模型恢复分析只定性地给出大致的空间分辨率，但由于这种方式较简单，因此被广泛应用在层析成像反演研究中。但在实际应用中，反演解存在的小尺度异常往往被错误地当作高精细度的体现；另外，棋盘格实验只适合于特定模型离散化方式，比如棋盘格测试只能适用于二维中四边形单元网格或三维中六面体网格，而不适合于其他网格形式如三角形或六边形等。



理论模型 $\boldsymbol{m}$



反演出的模型 $\underline{\boldsymbol{m}}$

图 1　棋盘格测试实例[20]
Fig. 1　An example of checkerboard test[20]

2　求解分辨率矩阵

分辨率矩阵分析通常见于线性反演或线性化反演当中。在一个线性反演问题中，其正演和反演方程可以用公式（1）和（2）来表示：

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{m} \tag{1}$$

$$\underline{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{G}^{-g}\boldsymbol{d} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{G}^{-g}$ 是观测矩阵 $\boldsymbol{G}$（大小为 $n\times m$）的实际或广义逆。公式（1）中 $\boldsymbol{d}$ 带入公式（2）中，就可以获得以下公式[22−23]：

$$\underline{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{m} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{G}^{-g}\boldsymbol{G} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 是一个 $m\times m$ 的矩阵，称为分辨率矩阵（resolution matrix），分辨率算子（resolution operator）或分辨率核（resolving kernels）。公式（3）定义了一个从实际模型 $\boldsymbol{m}$ 到反演解 $\underline{\boldsymbol{m}}$ 的线性投影。在这个投影中，每个参数的解可以看作是该空间位置附近各参数理论值

（或实际值）的加权平均，这就是 Backus-Gilbert 反演方法的基本假定[24]。Backus 和 Gilbert 等[24]为求解地球物理反演问题而提出了一个独特反演方法，假定实际模型与最终解之间存在公式（3）的线性映射关系，即解中每个参数的值 $\underline{m}_i$ 是实际模型中该参数自身理论值（或实际值）m_i 以及相邻模型参数理论值 $m_j(i \neq j)$ 的加权平均。所有权重构成的映射矩阵被称为 Backus-Gilbert 分辨率矩阵或 Backus-Gilbert 分辨率核。

虽然 Backus-Gilbert 提出的反演方法很少应用于实际，但其前提假设中的映射矩阵却广泛应用于对线性反演完善与否的评价当中。比如，它可以用以评估哪个位置的解不可靠，反演是否充分等[25]。通过这个映射矩阵也可以给出最小可探测长度[25]，因此该矩阵也应用于对反演模型的时空分辨长度分析。比如，如果分辨率矩阵为单位矩阵（即每行为 Delta 函数）的话，这表明了模型所有参数理论值与相对应空间位置解存在一一对应关系，即所获得的解完美地代表了实际模型，这时每个参数的空间尺度直接与其分辨长度有关。参照层析成像中的分辨长度为棋盘格检测板格子宽度一半的看法，这时的分辨长度为每个参数（比如每个单元）空间宽度的一半。

对于一个观测数据量和反演参数量适度的中等规模的线性反演问题，获得反演矩阵是较简单的[26－27]。在直接进行矩阵操作进行反演中，利用公式（4）就可以直接给出该矩阵[2，28]；即使在基于 Lanczos 迭代的迭代反演中，也可以给出分辨率矩阵[8，22，29]。对于较大的问题，可以使用 Cholesky 分解[30－31]来获得该矩阵，同时部分学者提出了近似分辨率矩阵的估算方法[32－33]。

虽然分辨率矩阵的定义（公式（3））非常简单，但在实际应用中，却存在着不同的空间分辨率矩阵[15]。根据所用基本公式，2011 年以前的正式出版物列出的分辨率矩阵可分为三类[15]：直接分辨率矩阵，正则化分辨率矩阵和混合分辨率矩阵。虽然三者在各自参考文献中都称为分辨率矩阵，但实际上三种矩阵具有明显不同的使用价值。除此之外，An[15]提出了第四类分辨率矩阵，即统计分辨率矩阵。下面对这四类分辨率矩阵的求解公式进行具体介绍。

2.1 直接分辨率矩阵

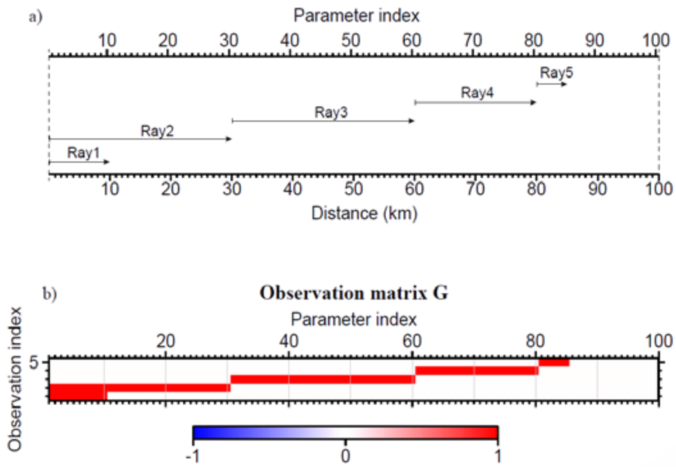
通过公式（4）直接求解的分辨率矩阵是分辨率矩阵的第一种形式，这里称为直接分辨率矩阵，并用 $\boldsymbol{R}$ 来表示。如果不求公式(4)中的 $\boldsymbol{G}^{-g}$，那么可以通过奇异值分解方法(Singular Value Decomposition，SVD）获得分辨率矩阵[22]：

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{V}$ 是一个酉矩阵。

从公式（4）来看，如果 $\boldsymbol{G}$ 是满秩矩阵，由于 $\boldsymbol{R}$ 是矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和它的逆的积，那么 $\boldsymbol{R}$ 为单位矩阵，这时一般认为整个反演系统是完善的。否则的话，$\boldsymbol{R}$ 就不是单位矩阵，这时的观测不能对所有参数有完善的约束，这时的反演被认为是病态的（ill-posed）。

图 2 显示了一个欠定（under-determined）问题。此例中包含了 5 条波传播的观测，其中观测到的传播用时(或称走时)构成了公式（1）中 $\boldsymbol{d}$，各单位长度线段内的慢速（波速的倒数）构成了公式（1）中 $\boldsymbol{m}$，每个波在各单位线段内的传播路径长度构成了公式（1）中 $\boldsymbol{G}$。在该示例中，模型 $\boldsymbol{m}$ 或 $\underline{\boldsymbol{m}}$ 共有 100 个参数（或称未知数），其中第 86～100 个参数没有任何观测穿过（图 2（a）），即这些参数没有受到任何观测的约束。显然，欠定问题的直接分辨率矩阵不是单位矩阵，因此肯定是病态问题。



（a）模型和观测，（b）该问题的观测矩阵

图 2　一个欠定反演实例[15]

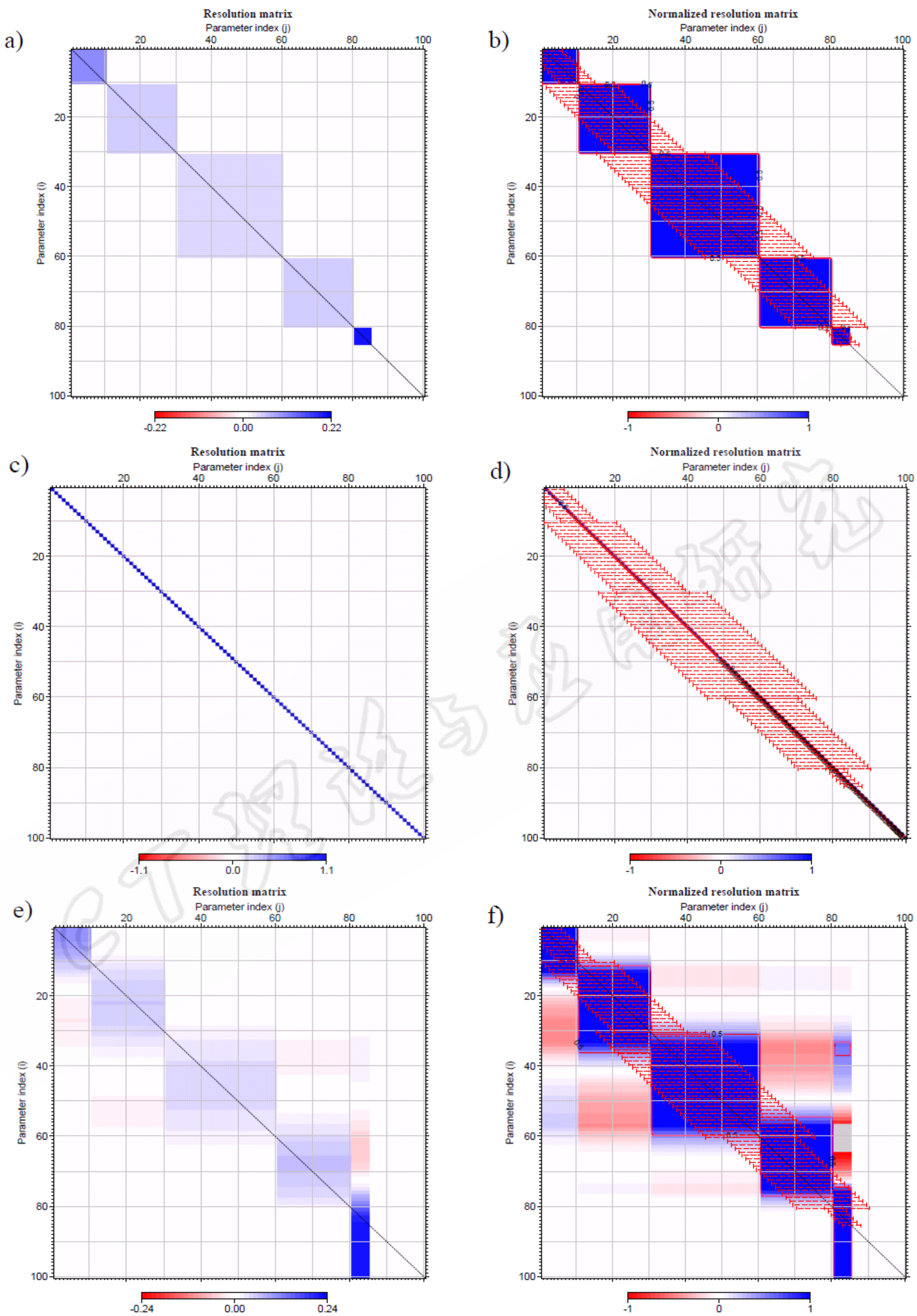
Fig.2　Illustration of an underdetermined 1D ray-propagation inversion example[15]

利用 SVD 分析可直接通过公式（4）或（5）获得图 2 示例的直接分辨率矩阵，这个矩阵显示在图 3（a）和（b）。图 3（a）纵轴表示模型解中以序号表示的各个参数，横轴表示真实模型的各个参数。色彩表示分辨率矩阵各元素的值。如果分辨率矩阵接近于对角矩阵，公式（3）说明了每一个参数的解 $\underline{m}_i$ 可以被认为是真实模型中该点及其在时空上相邻的参数理论值（如 m_j）的加权和[22]。在该矩阵中，对于解中第 20 个参数（纵轴中第 20 个参数，这里用 $\underline{m}_{20}$ 表示），真实模型中第 10 至第 30 参数 $m_j\,(j=10,\cdots,30)$ 对应的元素值相等，其余真实模型参数对应的元素都为 0。这个图像说明了，$\underline{m}_{20}$ 可看作是真实模型中第 10 至第 30 参数的加权平均所得，因此 $\underline{m}_{20}$ 的空间分辨率则与真实模型中这些参数所占的空间大小直接有关；分辨率矩阵中相关元素值相等表示真实模型中这些参数在解 $\underline{m}_{20}$ 中的贡献是一样的。

形象地，由于图 3（a）中相邻相等元素构成的方块表示了分辨率矩阵具有相同的值，方块之外区域为白色表示这些区域对应的分辨率矩阵元素的值为 0，即对解没有任何贡献。故此，方块形的宽度表示了对应解的分辨范围。参照棋盘格测试中的经验，这里可认为方块形宽度的一半是分辨长度。为方便起见，将图 3（a）给出的分辨范围用红色线段也分别显示在图 3（b）、（d）的（e）中，但是线段的中心平移到了矩阵的对角分量位置。

从图 2 可知，没有任何观测穿过第 86～100 参数，或者说这些参数不受任何观测约束，因此这些参数 $\underline{m}_i\,(i=86,\cdots,100)$ 是完全无解的。换言之，真实模型中没有任何参数对解中 $\underline{m}_i\,(i=86,\cdots,100)$ 有任何的贡献，因此正如图 3（a）显示的，分辨率矩阵中与这些参数有关的各元素都为 0。

现在来看一个超定（over-determined）问题。此时观测矩阵 $\boldsymbol{G}$ 一定是满秩的，从公式（4）我们知道其分辨率矩阵 $\boldsymbol{R}$ 肯定是单位矩阵，该矩阵与图 3（c）和（d）显示的图像类似。单位分辨率矩阵中除对角线元素为 1、且其余均为 0，这说明了解中任何参数 $\underline{m}_i$ 只与真实模型中的 $m_j(i=j)$ 有关，且两者完全相等。故此，单位分辨率矩阵意味着模型的每个参数可以完美地反演。



（a）,（b）直接分辨率矩阵；（c）、（d）是正则化分辨率矩阵；（e）、（f）是混合分辨率矩阵。右边的（b）、（d）、（f）是相应左图（a）、（c）、（e）中分辨率矩阵的归一化矩阵。红色线段表示各参数的分辨长度

图 3　图 2 反演问题的三种分辨率矩阵[15]

Fig.3　Three resolution matrices[15] for the inverse problem in Fig.2

公式（3）说明了每一个参数的解 $\underline{m}_i$ 可以被认为是理论模型中该点及其在时空上相邻参数理论值（如 m_j）的加权和[22]，其中分辨率矩阵各元素是求和的权重（具体公式参见下文），因此分辨率矩阵可以给出空间分辨率或分辨长度信息。对于一个单位分辨率矩阵（如图 3（c）和（d）），解中每个参数只与真实模型中对应的参数有关，故每个参数的空间分辨率等于这个参数所占空间宽度的一半。对于非对角矩阵的分辨率矩阵来说，以图 3（a）和（b）显示的分辨率矩阵来看，对于某个被颜色填充的方块所在的一个解参数（如 $\underline{m}_i$）来说，该方块内部的真实模型所有参数对 $\underline{m}_i$ 的贡献权重相同，而方块之外的真实模型参数的贡献权重为 0，那么 $\underline{m}_i$ 的空间分辨率应该与该方块的宽度直接有关。参照层析成像棋盘格分析的情况，每个参数的空间分辨率应等于所在阴影方块宽度的一半。

从以上分析来看，直接分辨率矩阵 $\boldsymbol{R}$ 可以给出分辨长度信息，也可以判定反演是否完善，但由于多数实际应用是病态的，而实际反演需要消除其病态特征，因此一般不给出直接分辨率矩阵。

2.2　正则化分辨率矩阵

对一个病态方程的反演，比如图 2 所示的欠定问题，需要利用增加阻尼因子、平滑约束或其他先验的、合理的约束条件对反演问题进行正则化（Regularization）。这里用 k 个参数的矢量 $\boldsymbol{c}$ 和 k 行 m 列（或称 $k\times m$ 大小）的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 来表示，那么以上的正演方程就变成了公式（6）：

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{m} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}\\ \lambda\mathbf{c}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}\\ \lambda\boldsymbol{C}\end{pmatrix} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是$(n+k)\times m$ 矩阵，λ是用来平衡先验约束和观测两者对反演相对贡献的常数。方程（6）的解可以表示为：

$$\underline{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{A}^{-g}\boldsymbol{b} \tag{8}$$

与上面利用正演方程和反演方程推出直接分辨率矩阵 $\boldsymbol{R}$ 公式（4）一样，通过正则化后的正演方程（6）和反演方程（8）可以获得一个新的分辨率矩阵：

$$\underline{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{A}^{-g}\boldsymbol{A} \tag{9}$$

这里称上式中的 $\underline{\boldsymbol{R}}$ 为正则化分辨率矩阵。虽然正则化分辨率矩阵同样定义了模型实际值与解之间的关系，但这个关系是建立在对反演问题进行了正则化后的正演方程（6）和反演方程（8）的基础之上的，而不是像直接分辨率矩阵 $\boldsymbol{R}$ 来自于直接的正演方程（1）和反演方程（2）。正则化至少应该使得方程（6）中的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵达到满秩，即 $\underline{\boldsymbol{R}}$ 是满秩矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和它的逆的积，那么 $\underline{\boldsymbol{R}}$ 将是一个 $m\times m$ 的单位矩阵。即，一个合理的正则化至少保证其分辨率矩阵为单位矩阵[3，22，34]。图 3（c）显示的是一个单位分辨率矩阵示例。在计算该示例矩阵 $\boldsymbol{A}$ 时，使用了平滑约束矩阵 $\boldsymbol{C}$，且 $\lambda=1$。

在实际反演中，用户往往直接使用某些现成的反演程序，而现成的反演程序一般只提

供了特定的一两个正则化约束选项。如果用户需要使用其他先验约束，最简单的方式就是通过公式（7）构建 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{A}$，然后把它们分别当作 $\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 代入有关程序。此时所进行的反演真正使用的正演方程是正则化正演方程（6），而不是原始的方程（1）。此时所给出的分辨率矩阵就是正则化分辨率矩阵 $\underline{\boldsymbol{R}}$ 。利用该正则化矩阵 $\underline{\boldsymbol{R}}$ 是否是单位矩阵可以评判反演过程是否完美，但该矩阵不能给出模型的空间分辨率。比如，一个经过正则化后的完美反演，其正则化分辨率矩阵肯定为单位矩阵（参图 3（c）），但其直接分辨率矩阵 $\boldsymbol{R}$（图 3（a））已经说明了，这个反演问题是病态的、甚至没有任何观测对某些参数进行约束；从分辨长度来看，图 3（a）显示这个问题所有参数的空间分辨率都大于单个参数所占据的空间尺度。因此正则化分辨率矩阵 $\underline{\boldsymbol{R}}$ 给出的空间分辨率信息是没有任何用处的，而只表示在添加了人为给定的数学条件下，所有参数在数学上已经被完美求解了。

2.3　混合分辨率矩阵

在公式（7）中，矢量 $\boldsymbol{c}$ 往往是空矢量，即所有元素为 0。在一些实际反演中，这个空矢量 $\boldsymbol{c}$ 可以被忽略，那么方程（6）可以获得与下面方程（10）一样的反演结果。

$$\left\|\boldsymbol{Gm}-\boldsymbol{d}\right\|^2+\left\|\lambda\boldsymbol{Cm}\right\|^2=\min \tag{10}$$

如果 $\boldsymbol{C}$ 是单位矩阵，那么方程（10）就是典型的反演问题的 Tikhonov 正则化方程。在矢量 $\boldsymbol{c}$ 被忽略的情况下，方程（8）中的矢量 $\boldsymbol{b}$ 被矢量 $\boldsymbol{d}$ 所替换，那么我们就可以利用原始正演方程（1）和正则化的反演方程（8）获得一个新的分辨率矩阵 $\underline{\underline{\boldsymbol{R}}}$ ：

$$\underline{\underline{\boldsymbol{R}}}=\boldsymbol{A}^{-g}\boldsymbol{G} \tag{11}$$

由于该矩阵来自于原始的观测矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和正则化后的 $\boldsymbol{A}$，这里将新的分辨率矩阵 $\underline{\underline{\boldsymbol{R}}}$ 称为混合分辨率矩阵。

多数通过分辨率矩阵给出分辨长度的参考文献，尤其是文献[30]、[31]和[36]，给出的分辨率矩阵属于这一类。

显然，由于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 两者的差别一般是不可忽略的，因此 $\underline{\underline{\boldsymbol{R}}}$ 不但包含了原始分辨率矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的信息，也包含了先验约束矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的信息，及平衡两者的权重λ的信息。图 2 所示的欠定问题的混合分辨率矩阵 $\underline{\underline{\boldsymbol{R}}}$ 显示在图 3（e）和（f），其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和λ与图 3（c）和（d）正则化矩阵计算所用的相同。一个欠定问题（图 2）的混合分辨率矩阵 $\underline{\underline{\boldsymbol{R}}}$ （图 3（e）和（f））可能与该问题的直接分辨率矩阵（图 3（a）和（b））非常近似。基于同样原因，即使对于一个超定问题，虽然其直接分辨率矩阵为单位矩阵，但其混合分辨率矩阵 $\underline{\underline{\boldsymbol{R}}}$ 也很少为单位矩阵，这是由于该矩阵来自于观测矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和另一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆。

让我们来看一个 $n>m$ 的超定问题。这里我们假设新的观测矩阵 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{o}}$ 是由上面的观测矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和一个 $m\times m$ 的单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 构成：

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{o}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{I}\end{pmatrix} \tag{12}$$

这个新的观测矩阵 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{o}}$ 是一个满秩矩阵，因此我们获得的直接分辨率矩阵 $\boldsymbol{R}$ 是一个与图

3（c）一样的单位矩阵。这时可以认为即使不使用任何先验约束，每个模型参数可以被完美地反演得到，那么每个参数的分辨长度等于该参数空间宽度的一半。正则化分辨率矩阵 $\underline{\boldsymbol{R}}$ 同样为单位矩阵，但混合分辨率矩阵 $\underline{\underline{\boldsymbol{R}}}$ 是否也为单位矩阵则取决于权重λ。对于一个较小的λ，混合分辨率矩阵 $\underline{\underline{\boldsymbol{R}}}$ （如图 4（a））将与预期的单位矩阵非常相似；但对于较大的λ，混合分辨率矩阵（如图 4（b））却异常地与欠定问题的分辨率矩阵（图 3（e））明显相似。因此，一个不合适的权重因子λ可以导致一个不合适的混合分辨率矩阵 $\underline{\underline{\boldsymbol{R}}}$，并最终得出错误的空间分辨率。

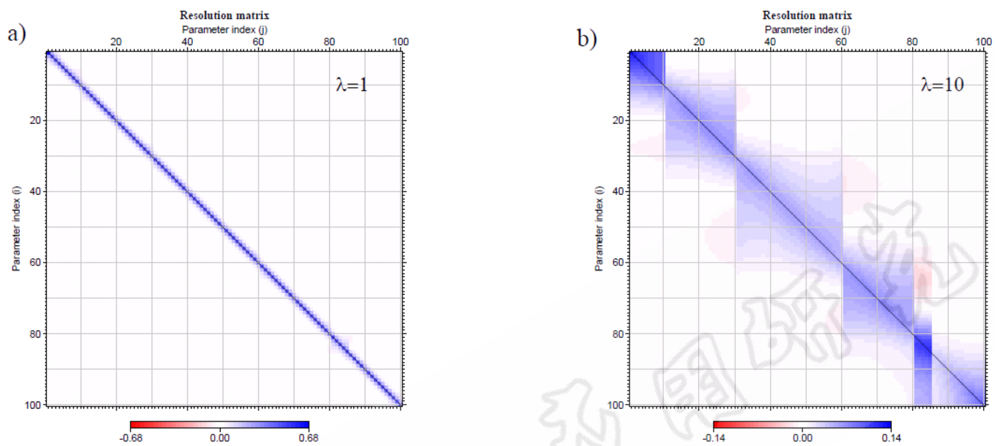


图 4　一个超定问题的混合分辨率矩阵[15]。其中平滑权重λ分别为（a）1 和（b）10

Fig.4　Hybrid resolution matrix for an overdetermined resolution matrix. The weights, λ, are respectively (a) 1 and (b) 10

总之，混合分辨率矩阵 $\underline{\underline{\boldsymbol{R}}}$ 可以用来评判反演是否完善，也可以给出空间分辨率的长度，但这往往依赖于所给的正则化对反演的贡献，即相对权重的大小。

2.4　统计分辨率矩阵

这类分辨率矩阵与前三类唯一相同的地方是其基本定义（公式（3）），但却不像前三类需要通过矩阵运算推导出分辨率矩阵，而是直接利用随机理论模型和该理论模型对应的解来直接反演得到的[15]。这里称这个新的基于很多随机模型反演出来的分辨率矩阵$\Re$为统计分辨率矩阵或反演分辨率矩阵。参照公式（3），统计分辨率矩阵的定义公式为：

$$\underline{\boldsymbol{m}} = \mathscr{R}\boldsymbol{m} \tag{13}$$

上式也可以表示为：

$$\underline{m}_i = \sum_{j=1}^{m} r_{i,j} m_j \tag{14}$$

其中 $r_{i,j}$ 表示分辨率矩阵$\Re$中第 i 行第 j 列的值。

前面已经提到，公式（3）、（13）和（14）都说明了某个参数的解 $(\underline{m}_i)$ 等于模型中相邻参数理论值 $(\underline{m}_i)$ 的加权平均，而所有权重 $r_{i,j}$ 构成了分辨率矩阵$\mathscr{R}$。权重 $r_{i,j}$ 的加和可以被看

作常数 c_i，即：

$$\sum_{j=1}^{m} r_{i,j} = c_i \tag{15}$$

如果 c_i 为 1 的话，公式（14）就表示了 $\underline{m}_i$ 完全可以被当作是 $\boldsymbol{m}$ 的无偏平均值[34]；否则，如果 $c_i \neq 1$，那么公式（14）右侧项就不是一个真的对 $\boldsymbol{m}$ 的平均值[34]。如果需要使得 $\underline{m}_i$ 成为 $\boldsymbol{m}$ 的无偏平均值，公式（14）需要修改为：

$$\underline{m}_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} r_{i,j} m_j}{\sum_{j=1}^{m} r_{i,j}} \tag{16}$$

理论上来说，模型中距离某个参数 $\underline{m}_i$ 的时空距离越远的参数 m_j 对 $\underline{m}_i$ 的贡献应该越小，因此分辨率矩阵的每一行（$r_{i,j}$, $j=1, m$）可以用高斯函数来近似[34, 37]。图 5 即为高斯函数的图形示例。在一维情况下，每个分辨率矩阵的元素用高斯函数表示其与距离间关系[15]：

$$r_{i,j} = a_i \exp\left(-\frac{(x_j - x_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) = a_i \exp\left(-\frac{L_{i,j}^2}{2\sigma_i^2}\right) = a_i \exp\left(-\frac{L_{i,j}^2}{2(w_i/1.17)^2}\right) \tag{17}$$

其中 x_i 和 x_j 表示 m_i 和 m_j 所在的空间位置，$L_{i,j}$ 就是两者空间距离，σ_i 表示 m_i 所在空间位置的高斯函数的宽度的一半（即半宽度），即高斯函数形状最高高度约 60％ 高度处的半宽度，但这里使用最高高度的一半高度位置处的半宽度 w_i 代表高斯函数的半宽度。由公式(17)可以得到 $r_{i,j}$ 归一化后的形式为：

$$\tilde{r}_{i,j} = \exp\left(-\frac{L_{i,j}^2}{2\sigma_i^2}\right) \tag{18}$$

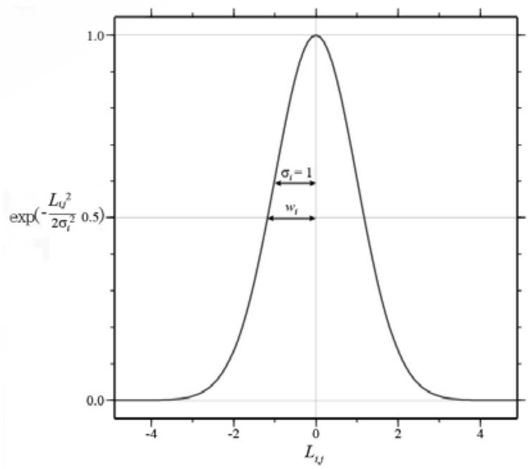


图 5 归一化高斯曲线
Fig.5 Normalized Gaussian curve example

如果把一个高斯形状等同于前面提到的棋盘格检测版中的一个格子，那么高斯函数的半宽度就相当于棋盘格宽度的一半，即可以直接认为是分辨长度，那么可以认为公式（17）中的 w_i 即代表了分辨长度。在实际问题中，我们求解分辨率矩阵的目的就是为了获得分辨长度。

在多维情况下，如果假定各个方向的分辨率是均匀的时候，把上式的空间距离 $L_{i,j}$ 可改为多维空间下的空间距离。对于其他情况的说明参见文献[15]。

直接把公式（17）中的 $r_{i,j}$ 代入公式（16）中，我们可以获得：

$$\underline{m}_i=\frac{\sum_{j=1}^{m}a_i\exp\left(-\frac{{L_{i,j}}^2}{2{\sigma_i}^2}\right)m_j}{\sum_{j=1}^{m}a_i\exp\left(-\frac{{L_{i,j}}^2}{2{\sigma_i}^2}\right)}=\frac{a_i\sum_{j=1}^{m}\exp\left(-\frac{{L_{i,j}}^2}{2{\sigma_i}^2}\right)m_j}{a_i\sum_{j=1}^{m}\exp\left(-\frac{{L_{i,j}}^2}{2{\sigma_i}^2}\right)}=\frac{\sum_{j=1}^{m}\exp\left(-\frac{{L_{i,j}}^2}{2{\sigma_i}^2}\right)m_j}{\sum_{j=1}^{m}\exp\left(-\frac{{L_{i,j}}^2}{2{\sigma_i}^2}\right)} \tag{19}$$

由于参数间空间距离 $L_{i,j}$ 可从参数的空间位置计算得到，故可看作常值。故公式（19）的右边可以简写表示为：

$$f(w_i,\boldsymbol{m})=\frac{\sum_{j=1}^{m}\exp\left(-\frac{{L_{i,j}}^2}{2{\sigma_i}^2}\right)m_j}{\sum_{j=1}^{m}\exp\left(-\frac{{L_{i,j}}^2}{2{\sigma_i}^2}\right)}=\frac{\sum_{j=1}^{m}\exp\left(-\frac{{L_{i,j}}^2}{2(w_i/1.17)^2}\right)m_j}{\sum_{j=1}^{m}\exp\left(-\frac{{L_{i,j}}^2}{2(w_i/1.17)^2}\right)} \tag{20}$$

那么公式（19）就可以表示为：

$$\underline{m}_i=f(w_i,\boldsymbol{m}) \tag{21}$$

需要注意的是，公式（3）和（13）表示分辨率矩阵只与给定的观测矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和正则化矩阵 $\boldsymbol{C}$ 有关，而与观测数据 $\boldsymbol{d}$ 没有任何关系；同时由于分辨率矩阵是实际模型 $\boldsymbol{m}$ 与解 $\underline{\boldsymbol{m}}$ 之间的一个映射关系，它不应依赖于特定的模型 $\boldsymbol{m}$ 或其解 $\underline{\boldsymbol{m}}$ 。也就是说，如果给定任意一个随机的理论模型 $\boldsymbol{m}^1$，然后通过正演获得其理论观测值，再反演获得这个模型对应的解 $\underline{\boldsymbol{m}}^1$。如果把 $\underline{\boldsymbol{m}}^1$ 中的 $\underline{m}_i^1$ 和 $\boldsymbol{m}^1$ 代入公式（19）或（21），参数间空间距离 $L_{i,j}$ 可从参数空间位置计算得到，那么此时该公式中只有 w_i 是未知数，即公式（21）就成了只含一个未知数的非线性方程。

求解公式（21），可以获得第 i 个解参数 $\underline{m}_i$ 的分辨长度 w_i；对于其他解参数如 $\underline{m}_k$，同样存在与公式（21）一样的只含一个未知数 w_k 的方程，求解这个方程可以获得第 k 个解参数的分辨长度 w_k。由于解矢量 $\underline{\boldsymbol{m}}$ 中有 m 个参数，故分别求解 m 个与公式（21）一样的方程，就可以获得所有参数的分辨长度。

在只有一组 $\boldsymbol{m}^1$ 和 $\underline{\boldsymbol{m}}^1$ 的情况下，反演所获得的 w_i 将依赖于给定的随机模型。如果给数个不同的随机模型 $\boldsymbol{M}(=\boldsymbol{m}^1,\boldsymbol{m}^2,\cdots,\boldsymbol{m}^{ns})$，分别通过正演和反演就获得其相应解 $\underline{\boldsymbol{M}}(=\underline{\boldsymbol{m}}^1,\underline{\boldsymbol{m}}^2,\cdots,\underline{\boldsymbol{m}}^{ns})$，对于第 i 个解参数 $\underline{m}_i$ 来说，这样就构成只含一个未知数 w_i 的由 ns 个方程组成的方程组。求解下面这个方程获得分辨长度 w_i[15]。

$$\sum_{l=1}^{ns}\left|\underline{m}_i^l-f(w_i,\boldsymbol{m}^l)\right|=\min \tag{22}$$

对于一个实际问题来说，长度 w_i 只可能是有限个值中的一个。比如图 2 中的实例中，如果每层厚度为 h 的话，那么 w_i 可能的解只能是 0.5h, h, 1.5h, …, mh 中的一个值。在这种情况下，枚举法是获得最优解的最简单且可行的方式。利用同样的随机理论模型 $\boldsymbol{M}$ 和对应解 $\underline{\boldsymbol{M}}$，重复该单个未知量反演，就可获得所有其他参数的分辨长度 $(w_i,\ i=1,2,\cdots,m)$。据此把所有分辨长度代入公式（18），就可获得归一化的分辨率矩阵。虽然利用分辨长度 w_i 和以

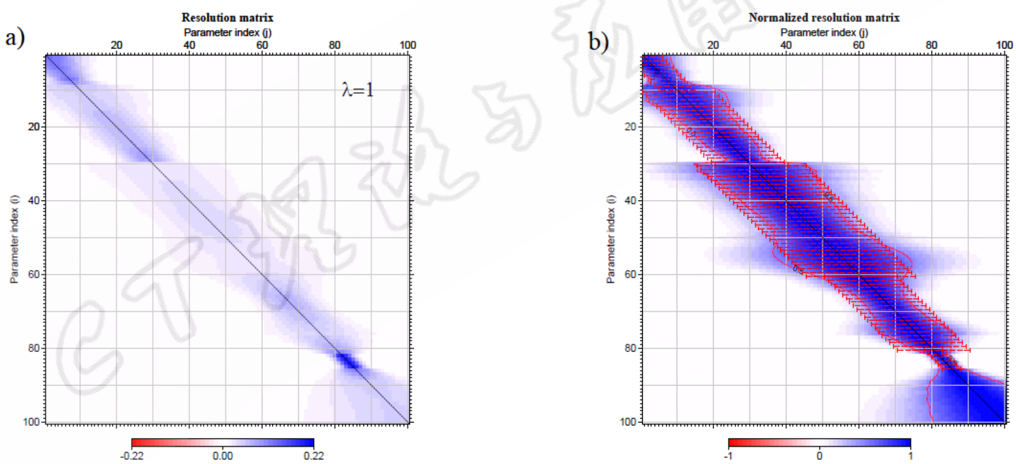
上模型通过求解公式（17）可获得其中的 a_i，但归一化分辨率矩阵（公式（18））完全可以满足分辨率研究的需要，因此求解 a_i 的实际意义并不大。

分析和实验表明[15]，获得一个稳定分辨长度所需的最小模型数 *ns* 与模型参数个数 *m* 没有关系，而主要受分辨长度变化范围（即可能有的分辨长度数量）所控制，且最小模型数 *ns* 可以表示为：

$$ns = \left(\frac{1.96\, d_i}{E_i}\right)^2 \tag{23}$$

其中 E_i 是分辨长度的误差边界，d_i 是所有可能分辨长度值的标准偏差。实验表明，一般 *ns* 为几十或几百足够[15]。

统计分辨长度计算过程无需进行任何矩阵变换，整个计算过程所需的内存小。统计分辨长度估算过程独立于所使用的模型反演方法和程序，因此无需改变原先任何程序就可以获得分辨长度，并可应用于所有线性和线性化反演问题；不但可以给出与方向性无关的，还可以给出与方向性有关的分辨长度[15]。这些特点决定了统计分辨率矩阵解法更加灵活，更加适合于较大问题的分辨长度估算。对分辨率矩阵的详细介绍请参见文献[15]，具体求解统计分辨率矩阵的程序代码和有关实例见文献[38]。



（b）为分辨率矩阵（a）的归一化矩阵。红色等值线表示了高斯曲线的半高度位置，红色线段表示了各参数的分辨长度。

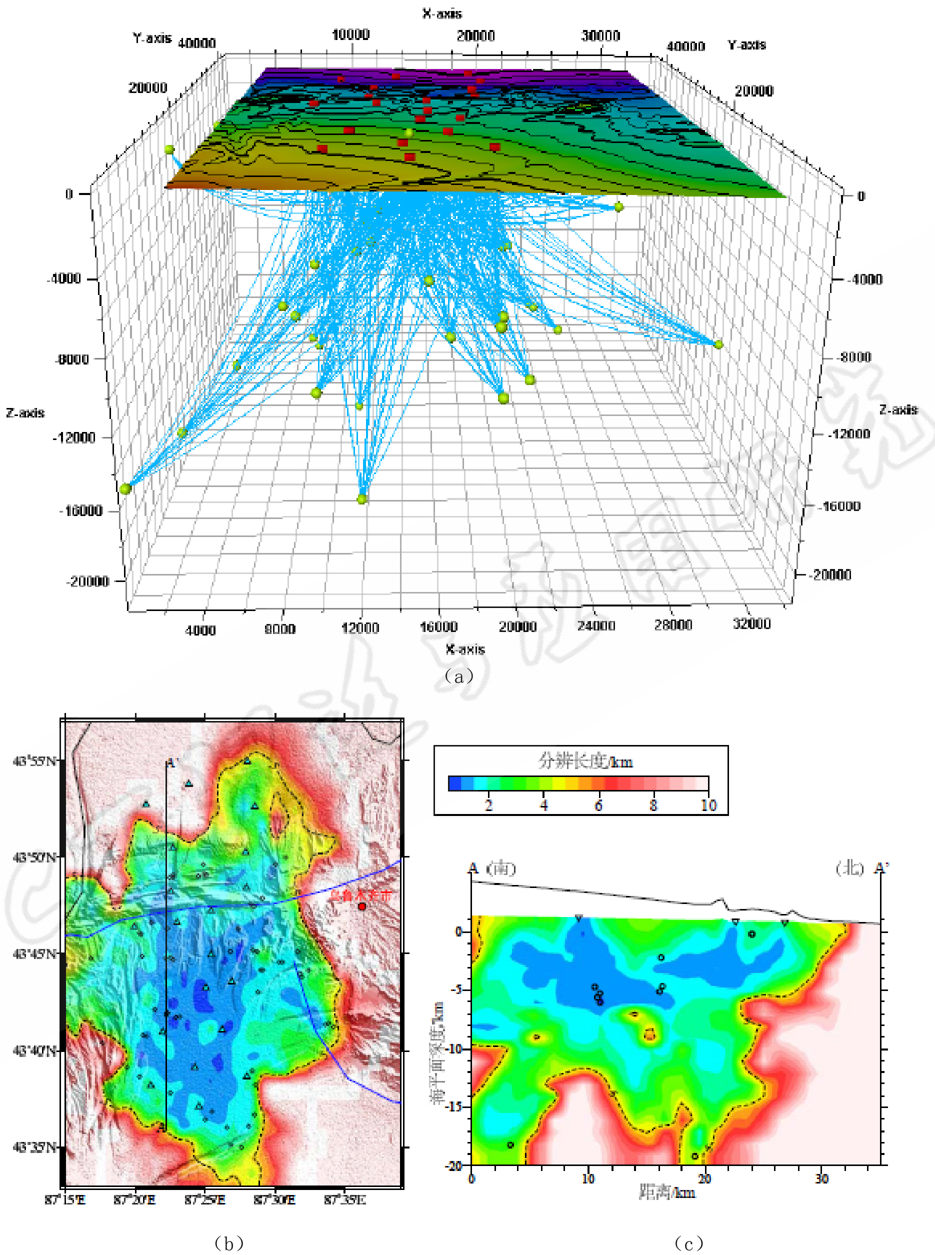
图 6　图 2 反演问题的统计分辨率矩阵[15]

Fig.6　Statistic resolution matrix[15] for the inverse problem in Fig. 2

以图 2 所示的欠定问题为例，创建了 25 个在一个固定参考值上增加 10% 随机偏差的理论模型，然后 SVD 反演出 25 个对应的解。利用这些理论模型及其对应解和以上方法计算了统计分辨率矩阵（图 6）。对比图 6 和图 3，可以看出，虽然统计分辨率矩阵与直接分辨率矩阵本身有一定差别，但两者可以得出的分辨长度是基本一致的。除了这里显示的一维反演问题，An[15]还给出了对二维反演问题计算统计空间分辨率实例。

冯梅等[39]在利用微地震 P 波到时，对新疆乌鲁木齐附近上地壳的三维层析成像反演中首次用统计分辨率分析方法，获得了三维反演模型的空间分辨长度分布（图 7）。在 P 波走时地震层析成像中[39]，首先需要通过射线追踪来获得地震波从震源到台站的传播路径，这

样就可以利用传播路径构建公式（1）中的观测矩阵 $\boldsymbol{G}$。如果三维空间的慢度（速度的倒数）分布矩阵 $\boldsymbol{m}$ 是已知的话，地震波沿路径传播所用的时间（也称走时）$\boldsymbol{d}$ 和观测矩阵 $\boldsymbol{G}$ 间关系可以用线性公式（1）来表示。但在实际问题中，走时 $\boldsymbol{d}$ 是可观测量，三维空间的慢度分



（a）地震台站（红方块）、地震（黄球）和传播路径（青色线）的三维空间位置；（b）三维模型空间分辨长度在 5 km 深度的水平分布；（c）一个垂直切片分布图。图（b）、（c）中的黑圆圈表示在切片或剖面 1 km 距离范围内发生的地震，图（b）中的三角和图（c）中的倒三角表示地震台站。水平切片图中标有字母的黑线表示垂直剖面的位置。图（c）顶部的黑线表示放大后的地形起伏。图（b）、（c）中的虚线为 5 km 分辨长度等值线

图 7　三维模型空间分辨长度计算实例[39]

Fig.7　Resolution lengths for a 3D seismic tomography[39]

布是待求量 $\underline{\boldsymbol{m}}$，即 P 波走时地震层析成像是一个可以用公式（2）表示的、利用地震波传播时间 $\boldsymbol{d}$ 为观测求解地下三维慢度结构 $\underline{\boldsymbol{m}}$ 的线性反演问题。但由于 P 波走时地震层析成像观测矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是一个大型稀疏矩阵，利用矩阵操作求解 $\boldsymbol{G}^{-g}$ 一般需要较大的内存，因此很少有人用矩阵操作方式进行反演计算，更不用说通过矩阵操作求解分辨率矩阵了，人们往往采用理论模型恢复试验来定性获得反演模型的分辨率信息。

在图 7 中，需要注意的是图 7（c）的垂直方向为海平面深度，它比模型深度小 1.3 km。正如我们想象的，图 7（b），（c）显示的分辨长度与地震和观测台站分布呈直接关系。虽然利用理论模型反演统计分辨率矩阵对计算的内存要求较低，但由于三维模型参数数量较大，对所有点的空间分辨长度进行计算耗费时间仍然较多。在层析成像研究中，往往只分析典型剖面或某一深度水平切面的结果，因此如果同样也只计算这些典型剖面或水平切面（如文章中显示的剖面和水平切面）上点的空间分辨长度可以大大减少计算量；在计算某剖面上各点分辨长度的过程中，只使用各随机理论模型中距该剖面或该水平切面一定距离范围内的点的参数，可以进一步缩短计算时间[39]。

2.5 四类分辨率矩阵的特点对比

从上文介绍来看，在多数实际反演中分辨率矩阵最主要的用途不是用于得到分辨长度，而是通过参考该矩阵是否接近于单位矩阵来评判反演的可靠程度。如果是单位矩阵，那么反演就是完美可靠的[3, 22, 27]。为此，在一个反演过程中需要通过各种合理方式使得（正则化）分辨率矩阵最终接近单位矩阵[34]。

实际上只有很少的文献把分辨率矩阵用于分辨长度分析。即使在这些文献中，分辨率矩阵计算也非常混乱，不同文献给出的分辨率矩阵公式是不一样的，因此不同文献中所谓的分辨率矩阵的意义也是不一样的。

虽然四种分辨率矩阵的本质是近似的，但各自具有不同的特点。具体表现如下：

（1）直接分辨率矩阵可以给出分辨长度信息，也可以判定反演是否完善，但分辨率矩阵分析主要应用于欠定反演问题[3]。由于多数实际应用是病态的，而实际反演需要消除该病态特征，因此一般反演不给出直接分辨率矩阵。

（2）正则化分辨率矩阵可以用来评估给定的反演系统是否完善，但无法给出任何空间分辨率信息。

（3）混合分辨率矩阵可以用来评判反演是否完善，也可以给出空间分辨率长度，但这往往依赖于所给的正则化对反演的贡献，即相对权重的大小。

（4）统计分辨率矩阵可以直接给出分辨长度，也可以用于判断反演是否完善。

前三类分辨率矩阵一般需要矩阵操作，它们有一定的相似性，与统计分辨率矩阵间具有明显区别，具体地：

（1）从功能上来看，前三类矩阵都包含反演本身不同侧面的信息，因此在这三类分辨率矩阵反演应用中，同时提供这三类分辨率矩阵则可以更全面地对反演进行评估；而统计分辨率矩阵则是从对理论模型反演测试的输入和输出模型反演得到的，其中输出模型是使用各种与实际反演一样的参数和技术后输出的模型，因此统计分辨率矩阵更能反映整个反演所涉及到的更多因素和过程。

（2）从运算方式来看，前三类分辨率矩阵是直接通过矩阵运算来获得分辨率矩阵；而

统计分辨率矩阵则是直接利用理论模型及其解来获得分辨率矩阵，因此 An[15]提出的统计分辨率矩阵计算过程不依赖于具体正演和反演方法，可以应用到更普遍的反演问题。不但可应用于利用矩阵操作进行反演的问题，也可以应用于不利用矩阵操作进行反演的问题。

（3）从计算效率来说，对于较简单的直接通过矩阵操作轻易实现的反演问题，前三类分辨率矩阵可以很方便地获得。但对于较大的反演问题，尤其是大规模层析成像计算中，由于矩阵运算需要占用大量的内存和计算时间，且往往超出了计算机的限制[16, 34]，则很难获得前三类分辨率矩阵；而统计分辨率矩阵则没有此内存的限制。统计分辨率矩阵的缺点是运算时间相对较长。

3　其他方法

在层析成像反演中，最简单最早用于评估分辨率的方法是基于射线密度来推测[8, 40−42]，如通过统计每个点的观测约束数来评估模型分辨率，但它无法给出具体的分辨长度。

一些文献提出了针对具体问题的分析分辨长度的方法。比如，在面波反演中，Yanovskaya 等[43]提出了一个计算可求解面积平均半径的方法来估计分辨长度。对于在反演中使用 Hessian 矩阵的情况，Fichtner 等[37]提出了一种直接获得分辨长度的方法。

4　结论

反演问题的分辨长度是评估所得空间模型精细程度的重要参数，决定了该模型应用的范围和价值。在一个反演过程中，获得该问题的分辨长度与获得该问题的解是同样重要的。但在实际问题中，估算一个反演的分辨长度却是比求解反演问题本身更加复杂和麻烦的事，这导致了很多反演问题往往不提供任何空间分辨率信息，即使提供分辨率矩阵的研究，其所提供的分辨长度的意义也往往不明确。

除了层析成像中广泛应用的理论模型恢复试验可定性获得空间分辨率信息外，从分辨率矩阵分析中可以定量获得分辨长度。常见的分辨率矩阵一般可分为三类，直接分辨率矩阵、正则化分辨率矩阵和混合分辨率矩阵。直接分辨率矩阵可以给出分辨长度信息也可以判定反演是否完善，但分辨率矩阵主要应用于分析欠定反演问题。正则化分辨率矩阵可以用来评估给定的反演系统是否完善，但无法给出任何空间分辨率信息。混合分辨率矩阵可以用来评判反演是否完善，也可以给出空间分辨率的长度，但这往往依赖于所给的正则化对反演的贡献。这三类矩阵都包含了反演本身不同侧面的信息，因此在一个反演应用中，同时提供这三类分辨率矩阵则可以更全面地对反演进行评估。

通过随机理论模型及其相应解进行反演获得的分辨率矩阵为第四种分辨率矩阵，即统计分辨率矩阵或反演分辨率矩阵。由于这种矩阵是从测试输入理论模型和用到了各种实际反演参数后的输出模型反演得到的，因此它能反映整个反演所涉及到的更多因素和过程。由于这种分辨率矩阵的计算过程无需进行矩阵操作且不依赖于具体正演和反演方法，无需对正演和反演程序进行修改，因此可以应用于更普遍的反演问题。实际应用证明统计分辨率分析方法适用于对线性和线性化反演问题的分辨长度估算，同时不但适用于简单的一维和二维反演问题，也适合于求解大型三维层析成像反演问题。

参考文献

[1] Tarantola A. Inverse problem theory[M]. Amsterdam: Elsevier, 1987.

[2] Aster RC, Borchers B, Thurber CH. Parameter estimation and inverse problems[M]. Burlington, MA, USA: Academic Press, 2005.

[3] Tarantola A. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation[M]. Philadelphia, PA, USA: SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005: 1-352.

[4] Parker RL. Geophysical inverse theory[M]. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1994: 1-386.

[5] Menke W. Geophysical data analysis: Discrete inverse theory[M]. San Diego: Academic Press, 1984: 1-260.

[6] Paige CC, Saunders MA. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 1982, 8(2): 43-71.

[7] Paige CC, Saunders MA. Algorithm 583, LSQR: Sparse linear equations and least squares problems[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 1982, 8(2): 195-209.

[8] Zhang H, Thurber CH. Estimating the model resolution matrix for large seismic tomography problems based on Lanczos bidiagonalization with partial reorthogonalization[J]. Geophysical Journal International, 2007, 170(1): 337-345.

[9] Goldberg DE, Deb K, Clark JH. Genetic algorithms, noise, and the sizing of populations[J]. Complex Systems, 1992, 6(4): 333-362.

[10] Sambridge M. Geophysical inversion with a neighbourhood algorithm-I. Searching a parameter space[J]. Geophysical Journal International, 1999, 138: 479-494.

[11] An MJ, Assumpção MS. Multi-objective inversion of surface waves and receiver functions by competent genetic algorithm applied to the crustal structure of the Paraná basin, SE brazil[J]. Geophysical Research Letters, 2004, 31(5): L05615.

[12] Lawrence JF, Wiens DA. Combined receiver-function and surface wave phase-velocity inversion using a niching genetic algorithm: Application to Patagonia[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 2004, 94(3): 977-987.

[13] 安美建, 石耀霖, 李方全. 用遗传有限单元反演法研究东亚部分地区现今构造应力场的力源和影响因素[J]. 地震学报, 1998, 20(3): 225-231.
An MJ, Shi YL, Li FQ. Genetic algorithm-finite element method inversion of the factors determining the recent tectonic stress field of part of East Asia area[J]. Acta Seismologica Sinica, 1998, 11(3): 265-272.

[14] 安美建, 冯梅, 赵琳. 地震层析成像中的不确定性[J]. CT 理论与应用研究, 2009, 18(2): 24-32.
An MJ, Feng M, Zhao L. Uncertainties in seismic tomography[J]. CT Theory and Applications, 2009, 18(2): 265-272.

[15] An MJ. A simple method for determining the spatial resolution of a general inverse problem[J]. Geophysical Journal International, 2012, 191(2): 849-864.

[16] Thurber CH, Ritsema J. Theory and observations-seismic tomography and inversion methods[C]// Romanowicz B, Dziewonski A. Treatise on Geophysics: Seismology and structure of the Earth, Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 2009: 323-360.

[17] Lévěque JJ, Rivera L, Wittlinger G. On the use of the checker-board test to assess the resolution of tomographic inversions[J]. Geophysical Journal International, 1993, 115(1): 313-318.

[18] Feng M, An MJ. Lithospheric structure of the Chinese mainland determined from joint inversion of regional and teleseismic Rayleigh-wave group velocities[J]. Journal of Geophysical Research, 2010, 115: B06317.

[19] 冯梅, 安美建. 中国大陆中上地壳剪切波速结构[J]. 地震学报, 2007, 29(4): 337-347.

Feng M, An MJ. Middle and upper crust shear-wave velocity structure of the Chinese mainland[J]. Acta Seismologica Sinica, 2007, 20(4): 359-369.

[20] An MJ, Feng M, Dong SW, et al. Seismogenic structure around the epicenter of the May 12, 2008 Wenchuan earthquake from micro-seismic tomography[J]. Acta Geologica Sinica (English Edition), 2009, 83(4): 724-732.

[21] Lebedev S, Nolet G. Upper mantle beneath Southeast Asia from S velocity tomography[J]. Journal of Geophysical Research, 2003, 108(B1): 2048.

[22] Jackson DD. Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data[J]. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1972, 28(2): 97-109.

[23] Menke W. Geophysical data analysis: Discrete inverse theory (revised edition)[M]. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1989: 1-289.

[24] Backus G, Gilbert JF. The resolving power of gross earth data[J]. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1968, 16: 169-205.

[25] Ritsema J, van Heijst HJ, Woodhouse John H. Global transition zone tomography[J]. Journal of Geophysical Research, 2004, 109: B02302.

[26] Berryman JG. Analysis of approximate inverses in tomography I. resolution analysis of common inverses[J]. Optimization and Engineering, 2000, 1(1): 87-115.

[27] Berryman JG. Analysis of approximate inverses in tomography Ⅱ. iterative inverses[J]. Optimization and Engineering, 2000, 1(4): 437-473.

[28] Kalscheuer T, Pedersen LB. A non-linear truncated SVD variance and resolution analysis of two-dimensional magnetotelluric models[J]. Geophysical Journal International, 2007, 169(2): 435-447.

[29] Yao ZS, Roberts RG, Tryggvason A. Calculating resolution and covariance matrices for seismic tomography with the LSQR method[J]. Geophysical Journal International, 1999, 138(3): 886-894.

[30] Boschi L. Measures of resolution in global body wave tomography[J]. Geophysical Research Letters, 2003, 30(19): 1978.

[31] Soldati G, Boschi L. The resolution of whole Earth seismic tomographic models[J]. Geophysical Journal International, 2005, 161(1): 143-153.

[32] Nolet G, Montelli R, Virieux J. Explicit, approximate expressions for the resolution and a posteriori covariance of massive tomographic systems[J]. Geophysical Journal International, 1999, 138(1): 36-44.

[33] Vasco DW, Johnson LR, Marques O. Resolution, uncertainty, and whole Earth tomography[J]. Journal of Geophysical Research, 2003, 108(B1): 2022.

[34] Nolet G. A breviary of seismic tomography: Imaging the interior of the earth and sun[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008.

[35] Crosson RS. Crustal structure modeling of earthquake data 1. Simultaneous least squares estimation of hypocenter and velocity parameters[J]. Journal of Geophysical Research, 1976, 81(17): 3036-3046.

[36] Barmin MP, Ritzwoller MH, Levshin AL. A fast and reliable method for surface wave tomography[J]. Pure and Applied Geophysics, 2001, 158: 1351-1375.

[37] Fichtner A, Trampert J. Resolution analysis in full waveform inversion[J]. Geophysical Journal International, 2011, 187(3): 1604-1624.

[38] 安美建. 统计分辨率分析源代码下载地址[CP]. [2013-05]. http://www.seismolab.org/people/meijian/softs.

[39] 冯梅, 李会军, 安美建, 等. 乌鲁木齐及以西上地壳结构及其地学意义[J]. 地震, 2013, (待刊). Feng M, Li HJ, An MJ, et al. Upper crust structure beneath Urumqi and its western region inferred from passive seismic exploration[J]. Earthquake, 2013, (in press).

[40] Toomey DR, Foulger GR. Tomographic inversion of local earthquake data from the Hengill-Grensdalur central volcano complex, Iceland[J]. Journal of Geophysical Research, 1989, 94(B12): 17497-17510.

[41] Thurber CH. Earthquake locations and three-dimensional crustal structure in the Coyote Lake area, Central California[J]. Journal of Geophysical Research, 1983, 88(B10): 8226-8236.

[42] Thurber C, Eberhart-Phillips D. Local earthquake tomography with flexible gridding[J]. Computers Geosciences, 1999, 25(7): 809-818.

[43] Yanovskaya TB, Kozhevnikov VM. 3D S-wave velocity pattern in the upper mantle beneath the continent of Asia from Rayleigh wave data[J]. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 2003, 138: 263-278.

How to Determine Spatial Resolution for an Inverse Problem

FENG Mei ✉, AN Mei-jian

(Institute of Geomechanics, Chinese Academy of Geological Sciences, Beijing 100081, China)

Abstract: The information of solution's spatial resolution is important for model appraisal in an inversion, however, the computation to determine a spatial resolution is nontrivial and often more difficult than to solve an inverse problem. Visual inspection of the restoration of a synthetic structure widely applied in tomographic studies can give indicative information on spatial resolution distribution, however, resolution matrix estimation can give quantitative information of spatial resolution length for a general inverse problem. Resolution matrices obtained by matrix operation may be divided into three classes: direct resolution matrix, regularized resolution matrix and hybrid resolution matrix. Each matrix can give part of the information on the inversion, and then the simultaneous implementation of all three resolution matrices in a single study can potentially provide a complete understanding on the resolution length information. An (2012) proposed a new class of resolution matrices generated by a simple one-parameter nonlinear inversion performed based on limited pairs of random synthetic models and their inverse solutions. The estimates were directly retrieved from synthetic models and their inverse solutions, and then it can include the information on the whole inversion procedure; The independence on the degree of inverse skill used and the absence of a requirement for matrix operations indicated that this approach is particularly suitable for very large linear/linearized inverse problems. Inversion examples even for 3D inversion problem demonstrated that reasonable resolution lengths can be determined from statistic spatial resolution calculation.

Key words: resolution length; resolution matrix; inverse problem; model appraisal.

作者简介：冯梅✉（1977－），女，巴西圣保罗大学地球物理系博士毕业，中国地质科学院地质力学研究所副研究员，主要从事天然地震观测的应用性研究工作，Tel：010-68418597，E-mail：mei_feng_cn@163.com。